NOMS Prénoms des élèves du groupe :

-
-

Travail de groupe n° 6

1 heure

	1.	2.	3.	4.	Tenue du groupe	BONUS
Total	4	6,5	6,5	2	1	2

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

- (a) Calculer v_0 .
- (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
- (c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- (d) Exprimer v_n en fonction de n .
- (e) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}$$

- (a) Calculer w_0 .
- (b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .
- (c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
- (d) Exprimer w_n en fonction de n .
- (e) Calculer $S'_n = \sum_{k=0}^n w_k = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2n - 1}{2^n}$

BONUS

5. On admet que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 2 - \frac{2n + 3}{2^n}$

A-t-on, pour tout entier naturel n : $\sum_{k=0}^n (v_k \times w_k) = \left(\sum_{k=0}^n v_k \right) \times \left(\sum_{k=0}^n w_k \right)$